Association Mathématique du Québec

Coups d'oeil à saveur historique sur l'extraction de racine carrée

Bernard R. Hodgson
Université Laval

1 Introduction

Aussi loin que l'on remonte en mathématiques, l'extraction de racine carrée a toujours suscité un vif intérêt. Clairement de portée géométrique — il est bien sûr question, comme son nom l'indique d'ailleurs, du côté d'un carré d'aire donnée —, la racine carrée s'avère, d'un point de vue arithmétique, une opération d'une complexité calculatoire non banale. Pour un Descartes néanmoins, l'extraction des racines (notamment carrées) occupe une place privilégiée en arithmétique, en compagnie des quatre opérations usuelles :

> (...) toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division (...) ([4, p. 1])

Ce commentaire de Descartes se retrouve au tout début de *La Géométrie*, dans une section où il explique « *comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie* ». Suivent donc des commentaires où Descartes indique comment effectuer à la règle et au compas non seulement l'addition et la soustraction, mais aussi la multiplication et la division (à l'aide de triangles semblables bien choisis), et l'extraction de racine carrée (encore une fois à l'aide de triangles semblables, en élevant une perpendiculaire dans un demi-cercle).

De nos jours, une simple calculatrice de poche rend le calcul d'une racine carrée tout à fait banal — dans la mesure où la précision désirée ne dépasse pas les capacités d'affichage de la calculatrice. Mais tel n'a évidemment pas toujours été le cas. Au fil des âges, diverses méthodes ont été introduites afin d'évaluer une racine carrée, ou encore d'en donner à l'aide d'algorithmes approximatifs, le cas échéant, une valeur approchée avec la précision désirée.

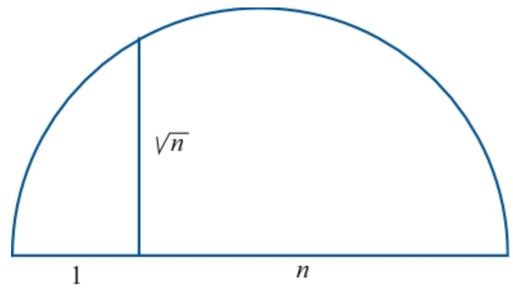

Figure 1

Cette idée de calcul par approximations successives occupe une place importante dans le présent texte. Elle a été exprimée comme suit par d'Alembert dans un article de l'*Encyclopédie* (seconde moitié du XVIII^e siècle) :

> Si un nombre n'est point un carré parfait, il ne faut pas s'attendre d'en pouvoir tirer la racine exacte en nombres rationnels, entiers ou rompus ; dans ces cas, il faut avoir recours aux méthodes d'*approximation*, & se contenter d'une valeur qui ne diffère que d'une très petite quantité de la valeur exacte de la racine cherchée.
>
> (Cité dans [2, pp. 227-228])

Nous proposons dans ce texte un survol de quelques techniques d'extraction de racine carrée. Les méthodes que nous présentons ont été développées en divers moments et lieux de l'histoire des mathématiques et illustrent bien, nous semble-t-il, la richesse et l'ingéniosité des points de vue que l'on a su adopter d'une époque à l'autre. Notre périple nous amènera tout d'abord en Mésopotamie, où on observera des valeurs approchées de racines carrées pouvant se justifier par un argument géométrique ; puis en Grèce, avec les calculs par approximations successives résultant de la célèbre méthode de Héron ; cet algorithme est lui-même un cas particulier de la méthode de Newton-Raphson, dans laquelle intervient la dérivée d'une fonction bien choisie ; puis on verra comment une valeur de $\sqrt{2}$ présente dans la tradition mathématique indienne peut s'expliquer en faisant appel à une dissection astucieuse de deux carrés ; on empruntera ensuite à la tradition chinoise une approche géométrique menant à l'algorithme de type « chiffre à chiffre » encore enseigné dans nos écoles primaires il a quelques décennies, avant l'avènement de la calculatrice ; enfin on terminera par une technique qui peut être rattachée à l'équation de Pell-Fermat.

2 La racine carrée en Mésopotamie

Notre premier arrêt nous amène donc en Mésopotamie (l'actuel Irak) quelques siècles avant notre ère. Les mathématiques de cette civilisation nous sont connues par l'intermédiaire de tablettes d'argile — on en a répertorié littéralement des centaines ! —, et certaines d'entre elles contiennent des inscriptions se rapportant à des racines carrées (par exemple, on cherche le côté d'un triangle rectangle, connaissant les deux autres). On y trouve ainsi comme valeurs de $\sqrt{2}$ les nombres

$$1 + \frac{25}{60} \tag{1}$$

et

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \tag{2}$$

(les Mésopotamiens utilisaient un système de numération sexagésimal, c'est-à-dire de base soixante). Cette dernière approximation vaut environ 1,41421296, avec exactitude sur les cinq premières décimales. On ne connaît pas le raisonnement ayant mené les mathématiciens mésopotamiens à ces valeurs particulières. Dans le cas de l'approximation (1), on pourrait imaginer que l'on a tout bonnement procédé par essai et erreur en élevant au carré des nombres donnés.

L'historien Victor Katz propose comme plausible l'explication suivante du procédé qu'auraient pu suivre les Mésopotamiens pour en venir à ces valeurs. Se basant sur des informations figurant sur certaines tablettes, Katz affirme (voir [10, p. 28]) qu'il s'agit là d'une méthode « for which there is some textual evidence ».

2.1 Approximation de $\sqrt{k}$ à partir d'une valeur par défaut

Géométriquement parlant, le calcul de $\sqrt{k}$ peut être vu comme la recherche du côté d'un carré d'aire k. On peut chercher à inclure dans ce carré le plus grand carré possible de côté connu — on peut utiliser pour ce faire l'une des nombreuses tablettes de nombres élevés au carré que possédaient les Mésopotamiens. Appelons a le côté du carré ainsi introduit, et c le petit segment qu'il faut ajouter à a pour obtenir le côté du carré d'aire k, c'est-à-dire $a + c = \sqrt{k}$.

La recherche d'une valeur a' plus près de $\sqrt{k}$ revient donc à trouver une bonne approximation de c, ce qui peut se faire en examinant la région en forme de « L » inversé entourant le carré de côté a — par analogie avec le style d'un cadran solaire ou encore avec l'équerre, cette région était appelée *gnomon* par les anciens Grecs (voir la définition 2 du Livre II des *Éléments* d'Euclide, où cette expression est introduite en lien avec un parallélogramme).

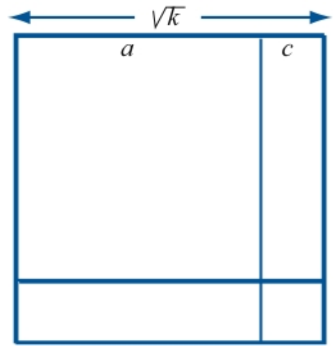

Figure 2

Ce gnomon a bien sûr une aire de $k - a^2$. Mais observons qu'il peut se décomposer en deux rectangles de côtés a et c, plus un « petit » carré de côté c. On a donc

$$2ac + c^2 = k - a^2.$$

(Ce type d'argument géométrique, basé sur des dissections élémentaires de figures, est indéniablement à la portée des Mésopotamiens. Mais il y a bien sûr un anachronisme dans la notation algébrique que nous utilisons pour exprimer ces faits géométriques.) On peut, afin de simplifier la discussion, négliger le carré de côté c, obtenant ainsi l'approximation $2ac \approx k - a^2$, c'est-à-dire

$$c \approx \frac{k - a^2}{2a}.$$

Il s'ensuit qu'une meilleure valeur de $\sqrt{k}$ (par rapport à la valeur de départ a) est obtenue en prenant pour approximation de $a + c$ la quantité

$$a' = a + \frac{k - a^2}{2a}. \tag{3}$$

Posant $c' = \frac{k-a^2}{2a}$, on observera que l'approximation $c \approx c'$ en est une *par excès* ($c' > c$) : en effet, puisque $2ac' = k - a^2$, on suppose donc que les deux rectangles a par c' ont ensemble même aire que le gnomon, forçant ainsi une valeur de c' plus grande que c. Il en résulte que l'approximation (3), $a' = a + c'$, basée sur une valeur de départ a prise *par défaut* (c'est-à-dire $a < \sqrt{k}$), est elle-même par excès ($a' > \sqrt{k}$).

L'inégalité $a' > \sqrt{k}$ peut aussi être justifiée en élevant chacun de ses membres au carré. Comme $a' = \frac{a^2+k}{2a}$, on a en effet

$$\begin{aligned} a'^2 - k &= \frac{a^4 + 2a^2k + k^2 - 4a^2k}{4a^2} \\ &= \frac{(a^2 - k)^2}{4a^2}, \end{aligned}$$

de sorte que $a'^2 - k > 0$, puisque le numérateur et le dénominateur du membre de droite de la dernière égalité sont tous deux strictement positifs.

On verra à la section 2.4 un argument géométrique montrant que l'approximant a' prend toujours une valeur par excès.

2.2 Approximation de $\sqrt{k}$ à partir d'une valeur par excès

Qu'arriverait-il si au lieu de partir d'un carré de côté a situé à l'intérieur du carré d'aire k, on en prenait un le contenant ?

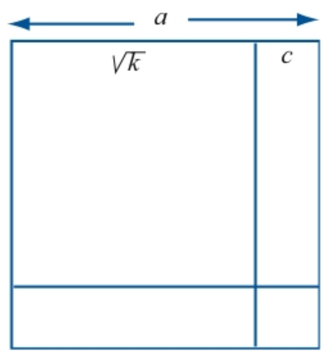

Figure 3

On a alors $a - c = \sqrt{k}$. Par ailleurs, le gnomon entourant le carré d'aire k, qui est maintenant d'aire $a^2 - k$, se décompose en deux rectangles de côtés $a - c$ et c, plus un « petit » carré de côté c. On a donc

$$2(a-c)c + c^2 = a^2 - k.$$

On en tire que $2ac - c^2 = a^2 - k$ (cette dernière expression s'interprète d'ailleurs aisément sur le gnomon). Négligeant à nouveau le carré de côté c, on obtient l'approximation c' telle que $2ac' = a^2 - k$, c'est-à-dire

$$c \approx c' = \frac{a^2 - k}{2a}.$$

Il s'ensuit, dans ce cas, qu'une meilleure valeur de $\sqrt{k}$ est obtenue en prenant pour approximation de $a - c$ la quantité

$$a' = a - c' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = a + \frac{k - a^2}{2a}. \qquad (4)$$

Il est intéressant de constater que la « formule d'approximation » qui en découle est exactement la même (comparer les lignes (3) et (4)), que la valeur de départ a soit prise plus petite ou plus grande que $\sqrt{k}$. Il en résulte que l'approximation de la racine carrée, lorsque basée sur une valeur de départ a prise *par excès* ($a > \sqrt{k}$), est elle-même par excès encore une fois ($a' > \sqrt{k}$). (On pourrait également justifier cette affirmation en notant que dans le cas $a > \sqrt{k}$, l'approximation de c par c' se fait maintenant par défaut : $c' < c$. On suppose en effet que les deux rectangles a par c' ont ensemble même aire que le gnomon, forçant ainsi une valeur de c' plus petite que c, puisque le gnomon est formé de deux rectangles a par c *moins* le carré de côté c. Conséquemment a' est par excès, puisque dans l'expression $a - c'$, on soustrait de a une quantité par défaut.)

Si on applique cette méthode à l'évaluation de $\sqrt{2}$ en partant de la valeur $1 + \frac{25}{60}$ (supérieure à $\sqrt{2}$), on trouve directement l'expression $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ — en se limitant à une précision de trois « positions sexagésimales ». Le détail des calculs est laissé aux bons soins du lecteur.

2.3 Une autre interprétation géométrique

Faisant fi de l'anachronisme inhérent à une telle manipulation, simplifions allègrement (et algébriquement !) la « formule mésopotamienne » $a + \frac{k-a^2}{2a}$; on obtient ainsi aisément

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right). \tag{5}$$

Cette réécriture met l'accent, dans le calcul de $\sqrt{k}$, sur les deux nombres a et $\frac{k}{a}$, où a peut être pris comme une certaine valeur approchée de $\sqrt{k}$ (peu importe la manière dont celle-ci a été obtenue). Et on voit de plus qu'il est ici question de la *moyenne arithmétique* de ces deux nombres, $\frac{1}{2}(a + \frac{k}{a})$.[1]

Cette vision donne lieu à une nouvelle interprétation géométrique. La recherche du côté du carré d'aire k peut se faire en remplaçant ce carré par un rectangle de côtés a et $\frac{k}{a}$, et donc d'aire k lui aussi — la figure suivante illustre le cas $a > \sqrt{k}$.

On prend ensuite la moyenne arithmétique $a' = \frac{1}{2}(a + \frac{k}{a})$ des deux côtés du rectangle, obtenant ainsi une nouvelle valeur a' qui, à tout le moins sur le plan intuitif, constitue une « meilleure approximation » du côté du carré.

Et c'est bel et bien le cas ! Ainsi, dans le cas illustré à la figure 4, on a d'une part $a' < a$ (puisque cette moyenne a' est située au milieu des valeurs a et $\frac{k}{a}$, avec $\frac{k}{a} < a$), et nous montrons d'autre part à la section suivante que a' est toujours plus grand que $\sqrt{k}$. Il en résulte donc que $\sqrt{k} < a' < a$, de sorte que l'approximant a' est plus proche que a de $\sqrt{k}$.

[1] Il convient d'insister sur le fait qu'une telle vision en termes de la moyenne arithmétique des deux nombres a et $\frac{k}{a}$ ne se retrouve pas dans les documents issus de l'époque mésopotamienne. Mais on la rencontre explicitement chez Héron d'Alexandrie (voir section 3.1).

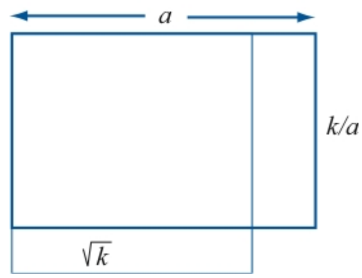

Figure 4

2.4 Une méthode excessive

L'interprétation géométrique de la section 2.3 mène à une preuve visuelle[2] du fait que la valeur obtenue par la méthode mésopotamienne est toujours par excès, que le nombre a soit inférieur ou supérieur à $\sqrt{k}$. Considérons par exemple le cas $a > \sqrt{k}$. Dans le rectangle de côtés a et $\frac{k}{a}$, insérons un carré de côté $\frac{k}{a}$ et considérons ensuite le carré de côté $a' = \frac{1}{2}(a+\frac{k}{a})$. Comme a' est la moyenne arithmétique de a et $\frac{k}{a}$, le côté de ce dernier carré est précisément à mi-chemin entre les longueurs a et $\frac{k}{a}$. Constatant la congruence des deux régions tramées de la figure 5, on voit immédiatement que le carré de côté a' a une aire plus grande que le rectangle a par $\frac{k}{a}$, c'est-à-dire $a'^2 > k$.

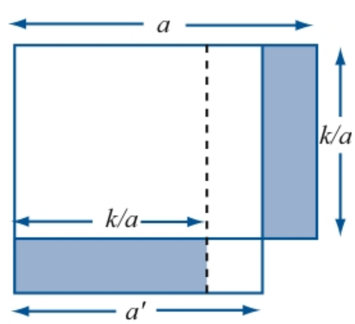

Figure 5

Nous avons donc le résultat suivant, auquel nous ferons appel à la section 3.2.

> *Peu importe que la valeur a constitue une approximation de $\sqrt{k}$ par défaut ou par excès, l'approximant $a' = \frac{1}{2}(a + \frac{k}{a})$ est toujours par excès, c'est-à-dire $a' > \sqrt{k}$.*

[2] Cette preuve m'a été suggérée par mon collègue Frédéric Gourdeau, que je remercie.

Rappelons qu'outre la preuve visuelle qui précède, ce résultat a d'abord été établi plus haut par un raisonnement géométrique portant sur les gnomons (sections 2.1 et 2.2). Nous en avons aussi donné une preuve algébrique à la section 2.1. Nous aimerions conclure cette section en présentant un autre argument de ce même résultat.

Une façon simple de se convaincre de la validité de l'inégalité $a' > \sqrt{k}$ est de faire appel à un fait « classique » en mathématiques élémentaires, l'*inégalité moyenne géométrique – moyenne arithmétique* (que nous désignons de manière abrégée par le sigle MG–MA). Mais pourquoi au juste parlons-nous ici de moyenne géométrique ?

Le fait de remplacer le carré d'aire k par un rectangle de même aire et de côtés a et $\frac{k}{a}$, comme l'illustre la figure 4, correspond bien sûr à l'égalité $k = a \times \frac{k}{a}$. Mais alors le côté du carré, qui est la racine carrée recherchée, s'écrit sous la forme

$$\sqrt{k} = \sqrt{a \times \frac{k}{a}},$$

où l'on retrouve dans le membre de droite la *moyenne géométrique* des deux nombres a et $\frac{k}{a}$. Or n'oublions pas que l'approximant a' est justement la moyenne arithmétique de ces deux mêmes nombres.

Dit autrement, on peut interpréter la méthode mésopotamienne comme consistant à approximer la racine carrée d'un nombre k, que l'on peut voir comme la moyenne géométrique de deux nombres a et $\frac{k}{a}$, à l'aide de la moyenne arithmétique de ces deux mêmes nombres. On est ainsi amené à se pencher sur la relation entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique de deux nombres, et c'est là qu'intervient l'inégalité MG–MA : la moyenne géométrique de deux nombres ne dépasse jamais leur moyenne arithmétique.

Inégalité MG–MA
Étant donné deux réels non négatifs u et v, on a

$$\sqrt{u \cdot v} \leq \frac{1}{2}(u + v),$$

l'égalité étant satisfaite lorsque $u = v$.

Il existe de nombreuses preuves de ce résultat bien connu. Pour le lecteur intéressé, nous en présentons quelques-unes dans l'Appendice 1 au présent texte.

Transposée au cas qui nous intéresse, l'inégalité MG–MA devient donc

$$\sqrt{a \times \frac{k}{a}} \leq \frac{1}{2}(a + \frac{k}{a}),$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{k} \leq a'.$$

L'égalité $a = \frac{k}{a}$ étant mise de côté pour raison de trivialité, on en tire donc, tel que souhaité,

$$\sqrt{k} < a'.$$

3 La racine carrée par approximations successives : la méthode de Héron

Autant que je sache, on ne retrouve pas chez les Mésopotamiens l'idée de répéter systématiquement leur démarche, c'est-à-dire de reprendre le calcul à partir de chaque nouvelle valeur ainsi obtenue, afin de trouver de proche en proche une meilleure approximation de $\sqrt{k}$. Mais une telle idée d'itérations successives pour la racine carrée se retrouve explicitement chez le mathématicien grec Héron d'Alexandrie (Ier siècle de notre ère).

3.1 La méthode proposée par Héron

L'expression $\frac{1}{2}(a + \frac{k}{a})$ a été proposée comme approximation de $\sqrt{k}$ par Héron d'Alexandrie dans le Livre I de ses *Métriques* — ouvrage perdu puis retrouvé en 1896. Héron présente au début de ce livre divers problèmes arithmétiques sur les triangles (calcul de l'aire et de l'hypoténuse du triangle rectangle de cathètes donnés, aire du triangle isocèle de côtés donnés, etc.) et il en vient, dans le problème 8 ([7, pp. 18–25]), à une méthode générale pour le calcul de l'aire A du triangle dont on connaît les trois côtés a, b et c. C'est alors qu'il introduit la célèbre formule qui porte son nom — quoiqu'elle était vraisemblablement connue d'Archimède (cf. [6, II, p. 322]) :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{6}$$

où $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ est le demi-périmètre du triangle. Le problème 8 du Livre I se termine d'ailleurs par une « preuve géométrique » (selon les mots mêmes de Héron) de la formule (6).

Mais auparavant Héron applique, dans ce même problème, sa formule au cas $a = 7$, $b = 8$ et $c = 9$, de sorte qu'il doit calculer $\sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720}$ (dans les problèmes précédents, les longueurs ont été choisies de manière à ce que les extractions de racine carrée soient immédiates : $\sqrt{25}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{144}$). Héron écrit alors :

> Puisque 720 n'a pas de côté rationnel, nous extrairons le côté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que

> 720 est 729 qui a pour côté 27, divise 720 par 27, cela fait 26 et $\frac{2}{3}$, ajoute 27 cela fait 53 $\frac{2}{3}$; prends-en la moitié, cela fait 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$. En fait, 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ multiplié par lui-même donne 720 $\frac{1}{36}$; de sorte que la différence (sur les carrés) est $\frac{1}{36}$. Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$, nous mettrons 720 $\frac{1}{36}$ trouvé tout à l'heure à la place de 729 et, en procédant de la même façon,[3] nous trouverons que la différence (sur les carrés) est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.
>
> (Cité dans [2, p. 231])

Ce texte de Héron mentionne donc explicitement l'idée de répéter le calcul à partir de la valeur obtenue, de manière à se rapprocher autant que désiré de la valeur recherchée. On voit ainsi surgir une suite (théoriquement illimitée) de valeurs $a_1, a_2, a_3, \dots$ obtenues par itération de la « formule de Héron » et se rapprochant de $\sqrt{k}$, chaque approximation étant reliée à la précédente par la relation

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right). \tag{7}$$

Ainsi, c'est presque en passant que Héron introduit la formule $\frac{1}{2}(a+\frac{k}{a})$, et il ne dit rien quant à la manière dont il est parvenu à cette expression. S'agit-il d'un raisonnement géométrique comme celui évoqué à la section 2.3, où on approxime un carré par des rectangles de même aire ? Ou bien a-t-il utilisé une autre approche ? Ou encore s'agit-il d'un fait emprunté à des textes plus anciens ou appartenant au « folklore mathématique » de son temps ? On ne le sait pas.

Nous aimerions néanmoins revenir ici sur l'interprétation de l'algorithme de Héron qui résulte des propos de la section 2.4. À défaut d'avoir pu être repérée explicitement dans la littérature de l'époque, cette interprétation fait à tout le moins intervenir deux expressions tout à fait dans l'esprit des mathématiques grecques de l'Antiquité : la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux nombres donnés. Rappelons à cet égard que les Pythagoriciens considéraient diverses sortes de « moyennes » (voir [6, I, pp. 85–89]), dont en particulier la *moyenne arithmétique* $\frac{1}{2}(u+v)$ et la *moyenne géométrique* $\sqrt{u \cdot v}$ de deux nombres u et v.

Les commentaires de la section suivante sont largement inspirés de la présentation que l'on trouve dans [1, pp. 11-13].

3.2 Une analyse de la méthode de Héron

[3] Autrement dit, en travaillant avec le « côté » 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ plutôt qu'avec 27. Rappelons au passage que la notation 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ signifie $26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

La formule de Héron fait donc intervenir deux nombres, a et $\frac{k}{a}$, qui sont les côtés d'un rectangle d'aire k que l'on prend comme approximation du carré de même aire. On suppose ici que $a \neq \frac{k}{a}$, car sinon le problème de la recherche de $\sqrt{k}$ serait terminé !

Or il est clair que ces deux nombres a et $\frac{k}{a}$ viennent « encadrer » le côté $\sqrt{k}$ du carré, dans le sens que

- si $a < \sqrt{k}$, alors $\sqrt{k} < \frac{k}{a}$ (cas $a < \sqrt{k} < \frac{k}{a}$), et
- si $a > \sqrt{k}$, alors $\sqrt{k} > \frac{k}{a}$ (cas $\frac{k}{a} < \sqrt{k} < a$).

Cette observation découle directement de l'égalité $a \cdot \frac{k}{a} = k$: lorsqu'on considère un produit de deux facteurs, ces facteurs se situent forcément de part et d'autre de la racine carré du produit. On peut aussi raisonner directement sur les inégalités ; ainsi, dans le cas où par exemple $a > \sqrt{k}$, on a alors $\frac{k}{a} < \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$.

De plus, si on pose

$$a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$$

— a' est donc la nouvelle valeur d'approximation donnée par une application de l'algorithme de Héron —, on a clairement que a' est elle aussi encadrée par a et $\frac{k}{a}$ (a' est en effet une moyenne arithmétique !). On peut donc espérer que les deux nombres a' et $\frac{k}{a'}$ vont constituer un « meilleur encadrement » de $\sqrt{k}$ que a et $\frac{k}{a}$. Et c'est bien le cas !

Afin d'établir ce fait, nous simplifions d'abord le cadre de notre discussion en rappelant le résultat suivant introduit à la section 2.4.[4]

Peu importe que la valeur a constitue une approximation de $\sqrt{k}$ par défaut ou par excès, la nouvelle valeur $a' = \frac{1}{2}(a + \frac{k}{a})$ est toujours par excès, c'est-à-dire $a' > \sqrt{k}$.

Chaque étape de la méthode de Héron donne donc une valeur d'approximation par excès, de sorte que la seule exception possible devient le choix de la valeur initiale, que la personne appliquant la méthode pourrait éventuellement choisir par défaut. Dans la discussion

[4] Rappelons qu'une des preuves du résultat figurant en encadré fait intervenir les notions de moyennes arithmétique et géométrique. Ces moyennes, nous l'avons dit, remontent à l'école pythagoricienne, donc plus de cinq cents ans avant Héron. Cependant rien dans la littérature, autant que je sache, ne vient supporter la prétention que l'interprétation en termes de ces moyennes serait le point de vue qui aurait guidé Héron. Néanmoins il s'agit sans contredit d'une manière à la fois élégante et inspirante d'aborder la méthode de l'Alexandrin. Par ailleurs, nous mentionnons à l'Appendice 1 deux textes grecs anciens dont on peut extraire le lien entre ces deux moyennes tel qu'exprimé par l'inégalité MG–MA. Mais il n'est pas du tout clair pour autant qu'une telle vision aurait pu servir d'inspiration à Héron.

qui suit, nous ne perdons donc pas de généralité en nous restreignant au cas de valeurs approximatives par excès.

Étant donné le couple $(\frac{k}{a}, a)$ formant un encadrement de $\sqrt{k}$,

$$\text{c.-à-d.} \quad \frac{k}{a} < \sqrt{k} < a,$$

on en tire, par une application de la formule de Héron, un approximant a' tel que $a' > \sqrt{k}$, de sorte que le couple $(\frac{k}{a'}, a')$ constitue un encadrement plus fin :

$$\frac{k}{a} < \frac{k}{a'} < \sqrt{k} < a' < a.$$

Il en est bien sûr de même pour les étapes suivantes a'', a''', etc. Il y a même plus. Comme a' est la moyenne arithmétique de $\frac{k}{a}$ et a, ce point est situé précisément au milieu de l'intervalle séparant ces deux points. La valeur recherchée, $\sqrt{k}$, se trouve donc dans la « moitié gauche » de cet intervalle. Il en est de même pour les étapes d'approximation suivantes.

4 À la recherche d'une racine d'une équation algébrique : la méthode de Newton-Raphson

Si $\sqrt{k}$ s'interprète géométriquement comme le côté du carré d'aire k, algébriquement il s'agit d'une solution de l'équation $x^2 - k = 0$. Ce passage à un cadre où on s'intéresse aux racines d'un polynôme permet de mettre en jeu une méthode générale de recherche des « zéros » d'une fonction f — c'est-à-dire des valeurs de la variable x qui sont racines de l'équation $f(x) = 0$. Le lecteur ayant conservé un certain souvenir de son premier cours de calcul différentiel — la présente vision relève donc à la fois de l'algèbre et de l'analyse — aura reconnu ici le contexte d'application de la méthode de Newton-Raphson, un thème classique dans un tel cadre. Cette méthode a été introduite par Isaac Newton vers 1670, puis simplifiée par son compatriote Joseph Raphson en 1690 dans les formules itératives aujourd'hui usuelles. Ce n'est qu'une centaine d'années plus tard qu'on insistera sur l'aspect géométrique de la méthode — d'où l'appellation « méthode de la tangente » fréquemment utilisée —, de même que sur les considérations de convergence (voir [2, Chap. 6]).

Soit donc une fonction f « assez jolie » — dans notre cas, il suffira de supposer que f est deux fois dérivable, ce qui est évidemment le cas de la fonction $f(x) = x^2 - k$ à laquelle nous appliquerons Newton-Raphson. On supposera de plus qu'on a repéré un certain intervalle où se situe une racine de l'équation $f(x) = 0$, par exemple en étudiant la variation du signe de la fonction f. La méthode de Newton-Raphson consiste à se donner une valeur arbitraire a située « près de » la racine recherchée, pour ensuite prendre comme approximation de cette racine le point d'intersection a' avec l'axe des x de la *tangente à la courbe* au point $f(a)$.

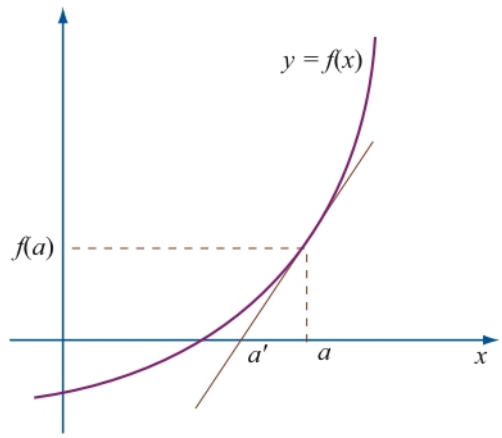

Figure 6

La pente de cette tangente s'exprimant, à l'aide de la fonction dérivée f', sous la forme

$$f'(a) = \frac{f(a)}{a - a'},$$

on en tire facilement la relation suivante pour a' :

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

À nouveau l'idée est de procéder par approximations successives, obtenant une suite de valeurs $a_1, a_2, a_3, \dots$ se rapprochant de plus en plus du zéro de la fonction f.

Lorsque appliquée à la fonction $f(x) = x^2 - k$, la relation caractéristique pour a' devient

$$a' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right),$$

où on reconnaît à la fois la formule mésopotamienne et, bien sûr, celle de Héron.

Un des intérêts de relier tant la technique mésopotamienne que celle de Héron à la méthode de Newton-Raphson est qu'on peut tirer de ce cadre des renseignements précieux sur l'efficacité de ces algorithmes. En effet, on peut démontrer assez facilement que la méthode de Newton-Raphson *converge de façon quadratique*. On signifie par là que l'erreur faite à la $(i+1)^{\text{e}}$ étape — c'est-à-dire la différence $e_{i+1} = x_{i+1} - \bar{x}$ entre le $(i+1)^{\text{e}}$ approximant x_{i+1} et $\bar{x}$, le zéro de f — s'exprime en fonction du carré de l'erreur e_i de l'étape précédente. (Ce dernier résultat fait l'objet de l'Appendice 2 de ce texte.)

C'est donc dire que si on se situe dans un « bon voisinage » de la racine recherchée, par exemple avec une erreur de l'ordre de 10^{-3}, une nouvelle application de la méthode mésopotamienne, ou de Héron, donnera une erreur d'ordre 10^{-6}, doublant par le fait même le nombre de décimales de précision. On voit ainsi que ces méthodes d'approximation de la racine carrée, malgré leur grande simplicité, sont d'une remarquable efficacité.

5 La racine carrée par un bricolage géométrique

Nous empruntons à la tradition indienne notre prochain exemple d'extraction d'une racine carrée. Les *Sulbasutras* forment une annexe à un ensemble de textes religieux (les *Védas*) et ils remontent à l'époque 800-600 avant notre ère. Le mot *sulba* signifie « corde » : on trouve dans les *Sulbasutras* des instructions pour la construction d'autels pour des rituels religieux, la corde servant à mesurer les dimensions des autels.

On propose dans les *Sulbasutras* la méthode suivante pour le calcul de $\sqrt{2}$ (vraisemblablement en rapport avec le projet de construire un autel d'aire double d'un autel donné) : « Augmente la mesure de son tiers, et ce tiers de son propre quart moins la trente-quatrième partie de ce quart. » ([11, p. 40]) On utilise donc comme approximation de $\sqrt{2}$ l'expression

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}. \tag{8}$$

Cette approximation vaut environ 1,414215686, avec exactitude sur les cinq premières décimales. Comme c'est le cas pour la méthode mésopotamienne ou celle de Héron, les auteurs des *Sulbasutras* n'ont fourni aucune indication quant au raisonnement les ayant menés à cette valeur pour $\sqrt{2}$.

Une vision possible de l'expression (8) est reprise par Joseph [8, pp. 234–236] (s'appuyant sur des travaux de B. Datta). L'argument repose sur le fait de se donner deux copies d'un carré d'aire 1 et de voir comment « réunir » ces figures de manière à former un carré d'aire 2, dont on cherchera ensuite à évaluer le côté. Bien sûr une solution générale à un tel problème d'addition d'aires est fournie par le théorème de Pythagore : le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle a justement pour aire la somme des aires des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit. Mais une telle approche, si élégante soit-elle en ce qui concerne l'idée d'additionner des aires, n'est guère utile lorsqu'on cherche à obtenir une valeur numérique du côté du carré. L'argument que l'on trouve dans [8] repose sur le « bricolage » géométrique suivant, dans lequel intervient la figure 7.

Soit donc les carrés $ABCD$ et $PQRS$, tous deux d'aire un. Nous décomposons tout d'abord l'un des deux carrés donnés en trois bandes identiques. Deux de ces bandes (régions 1 et

2) peuvent être placées sur les côtés de l'autre carré. Partageant alors la troisième bande en trois carrés, nous prenons l'un d'eux (région 3) pour le placer dans le « coin », près des régions 1 et 2. Il reste donc à placer autour du carré $ABCD$ (ainsi augmenté) les deux derniers carrés, vestiges du deuxième carré de départ. À cette fin, nous partageons chacun de ces deux « petits » carrés en quatre bandes identiques (régions 4 à 11), que nous plaçons tel qu'indiqué à la figure 7.

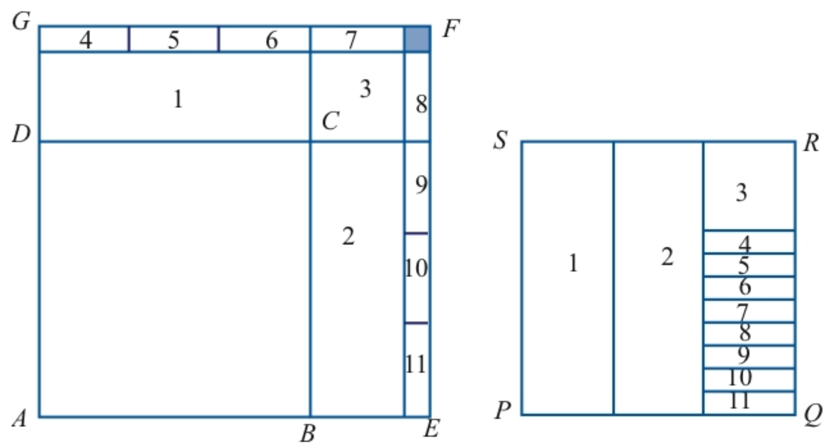

Figure 7

À ce stade, le premier carré $ABCD$ a donc été transformé en un grand carré $AEFG$ de côté

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=1\,\frac{5}{12}. \tag{9}$$

Cependant l'aire de ce grand carré excède le double de celle de $ABCD$, puisque le petit carré tramé situé près du sommet F n'a pas été recouvert par des morceaux provenant du carré $PQRS$. Or, ce petit carré a une aire de $(\frac{1}{3\cdot 4})^2$. Il nous faut donc, pour équilibrer le tout, « répartir » ce petit carré le long des côtés du carré $AEFG$ en le retranchant.

À cette fin, imaginons que l'on enlève deux très minces bandes, chacune de largeur x, du carré $AEFG$ — par exemple on enlève une première bande à la gauche, le long de AG, et l'autre au bas, le long de AE. On suppose bien sûr que ces deux bandes totalisent une aire de $(\frac{1}{3\cdot 4})^2$, de sorte que

$$2x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)-x^2=\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2.$$

Négligeant le terme x^2, cette dernière équation devient après simplification

$$x\approx\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34},$$

tel que désiré.

On aura remarqué que l'analyse géométrique qui précède ne vaut que pour le cas de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire lorsqu'on cherche à doubler l'aire d'un carré.

Katz [10, p. 28] propose une autre interprétation de l'approximation (8) pour $\sqrt{2}$. Prenant comme point de départ la valeur $1\frac{5}{12}$ figurant à la ligne (9), il applique l'approximation mésopotamienne $a' = a - \frac{a^2-k}{2a}$ — voir la ligne (4) —, obtenant ainsi directement l'approximation indienne de $\sqrt{2}$:

$$\frac{17}{12} - \frac{(\frac{17}{12})^2 - 2}{2 \cdot \frac{17}{12}} = \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{144}}{\frac{34}{12}} = \frac{17}{12} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

À ce sujet, Neugebauer écrit d'ailleurs : « The possibility seems to me not excluded that both the main term and the subtractive correction are ultimately based on the two Babylonian approximations. » ([12, p. 35])

6 La racine carrée « chiffre à chiffre » : visions géométrique et algébrique de l'algorithme usuel

Le prochain exemple de méthode d'extraction de racine carrée nous amène du côté de la Chine ancienne. Le livre *Les Neuf chapitres sur les procédures mathématiques* (en chinois, *Jiuzhang suanshu* — voir [3], [9]) figure parmi les principaux textes de mathématiques de l'Antiquité chinoise. Cet ouvrage, qui remonte à l'époque de la dynastie Han (–206 à 220), fut composé aux environs des débuts de l'ère commune et consiste en un recueil de connaissances mathématiques développées au cours du millénaire précédent. Le contenu mathématique des *Neuf chapitres* est présenté de façon sommaire et sans justifications, sous forme de problèmes avec réponses et de procédures pour trouver ces réponses. Cependant cet ouvrage, l'un des « classiques » de la Chine ancienne, a fait l'objet au cours des siècles de commentaires expliquant et justifiant ces algorithmes. Particulièrement intéressants pour notre propos sont les commentaires de Liu Hui (263), qui donnent une interprétation géométrique fort limpide de la méthode proposée dans les *Neuf chapitres* pour l'extraction de racine carrée.

6.1 Une vision géométrique

Nous voulons maintenant illustrer le fonctionnement de l'algorithme chinois pour la racine carrée et en fournir une motivation géométrique basée sur les commentaires de Liu Hui. À cette fin, nous utilisons comme cas-type le calcul de $\sqrt{55\,225}$, qui est l'un des exemples numériques traités dans *Les Neuf chapitres* (problème 12 du Chapitre 4). Le fait que ce nombre soit un carré parfait n'enlève rien à la généralité du propos, l'algorithme livrant un à un les chiffres de la racine carrée, quelle que soit leur valeur positionnelle. La discussion qui suit pourrait donc facilement être transposée au cas d'une racine carrée non entière. Cette constatation se retrouve d'ailleurs dans les commentaires de Liu Hui, qui parle explicitement de la poursuite de l'extraction de racine au-delà de l'unité, « dans la partie décimale » ([3, p. 365]) : Liu Hui mentionne que les chiffres successivement obtenus sont alors pris comme numérateurs, tandis qu'interviennent comme dénominateurs 10, 100, ... Et il exprime clairement le fait que plus on calcule de chiffres décimaux, plus les fractions correspondantes sont « fines », de sorte que bien que le carré de départ n'ait pas été complètement épuisé, la partie (« surface ») négligée devient si petite qu'« il ne vaut pas la peine d'en parler. » ([3, p. 365])

Sans surprise, Liu Hui voit le calcul d'une racine carrée comme la recherche du côté d'un carré d'aire donnée. Cependant, au lieu de procéder à une décomposition du carré « à la Mésopotamienne », il en fait une dissection qui colle de très près à la numération de base dix. Soulignons simplement, à propos de la numération chinoise, que les Chinois utilisaient entre autres un système décimal positionnel assez près du nôtre, le système des baguettes à calculer.

La figure 8, tirée des commentaires de Liu Hui (voir [3, pp. 323 et 801] et [9, p. 207]), sert de support aux arguments géométriques qui sous-tendent la procédure des *Neuf chapitres* pour l'extraction de racine carrée. La figure doit se lire étape par étape, tandis que l'on cherche à « épuiser » le carré d'aire donnée par des carrés de plus en plus grands — Liu Hui utilise même de la couleur pour illustrer ses propos, là où nous mettons une trame. (Cette figure n'est bien sûr pas à l'échelle.)

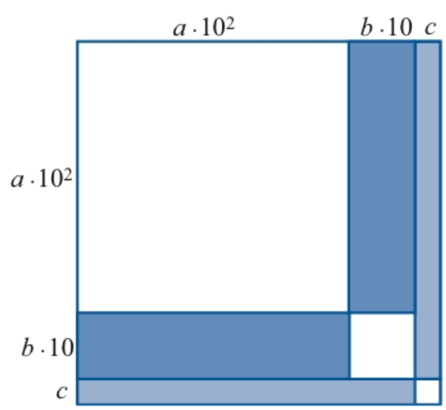

Figure 8

Il faut tout d'abord observer que $\sqrt{55\,225}$ est un nombre dont l'écriture décimale contient trois chiffres : ce fait découle facilement de l'examen du nombre de chiffres des premières puissances de 10. En base 10, le nombre $\sqrt{55\,225}$ est donc de la forme abc (ou si on préfère, $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$). Nous évaluons maintenant un à un chacun des chiffres a, b et c, dans l'ordre. Pour la clarté de la discussion, nous reproduisons la figure 8 à chaque étape du calcul, en insistant sur les éléments pertinents à cette étape. Il va de soi cependant que tout le raisonnement peut se faire sur la seule figure 8.

Étape I : Le chiffre des centaines

On cherche tout d'abord la valeur du chiffre des centaines, a, qui soit maximale de sorte qu'un carré de côté $a \cdot 10^2$ soit compris dans le carré d'aire 55 225, c'est-à-dire

$$(a \cdot 10^2)^2 \leq 55\,225. \tag{10}$$

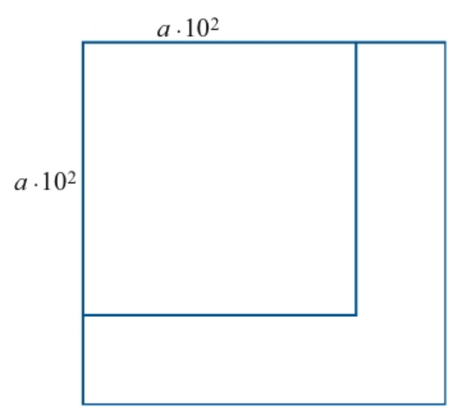

Figure 9

Il en résulte que $a = 2$. Observons alors le gnomon autour de ce carré de côté 200 ; il a pour aire $55\,225 - 200^2 = 15\,225$.

Étape II : Le chiffre des dizaines

Dans un deuxième temps, on cherche cette fois la valeur du chiffre des dizaines, b, qui soit maximale de sorte que deux rectangles de côtés 200 et $b \cdot 10$ plus un carré de côté $b \cdot 10$ soient compris dans le gnomon d'aire 15 225, c'est-à-dire

$$2 \cdot 200 \cdot b \cdot 10 + (b \cdot 10)^2 \leq 15\,225. \tag{11}$$

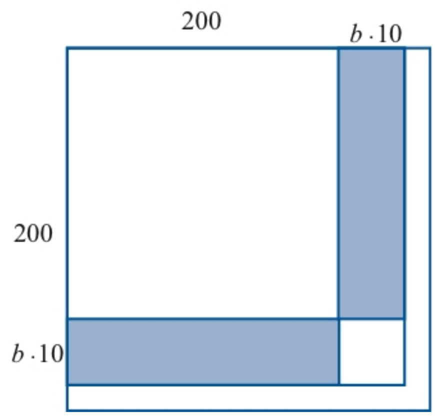

Figure 10

Comme $2 \cdot 200 \cdot 3 \cdot 10 + (3 \cdot 10)^2 = 12\,900$ et $2 \cdot 200 \cdot 4 \cdot 10 + (4 \cdot 10)^2 = 17\,600$, on en conclut que $b = 3$. On se retrouve alors avec un carré de côté 230, entouré d'un gnomon d'aire $55\,225 - 230^2 = 2\,325$.

Étape III : Le chiffre des unités

On cherche maintenant la valeur du chiffre des unités, c, qui soit maximale de sorte que deux rectangles de côtés 230 et c plus un carré de côté c soient compris dans le gnomon d'aire 2 325, c'est-à-dire

$$2 \cdot 230 \cdot c + c^2 \leq 2\,325. \tag{12}$$

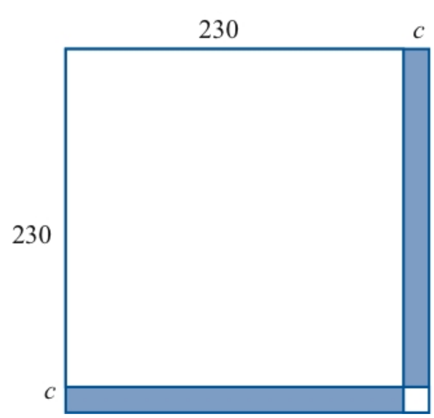

Figure 11

On en tire finalement que $c = 5$ — avec égalité à la ligne (12) —, de sorte que $\sqrt{55\,225} = 235$.

Insistons sur le fait que, contrairement aux méthodes vues dans les sections précédentes, la procédure des *Neuf chapitres* livre un à un les chiffres de la racine carrée recherchée, chaque étape de calcul founissant une nouvelle position décimale (par ordre de grandeur décroissant). C'est ainsi que dans le calcul de $\sqrt{55\,225}$, on a successivement obtenu les valeurs 200, 230 et 235. Dans le cas des algorithmes précédents, chaque étape permet en général d'obtenir plusieurs chiffres de la racine — n'oublions pas que ces méthodes sont toutes englobées dans l'algorithme de Newton-Raphson, qui converge quadratiquement.

6.2 Lien de l'algorithme chinois avec l'algorithme usuel

Il y a tout juste quelques décennies, on enseignait encore à l'école primaire une méthode de calcul de la racine carrée. Cet algorithme était bien sûr introduit comme une série de règles à appliquer plus ou moins aveuglément, sans justification aucune. Nous aimerions montrer brièvement ici que ce « truc de calcul » n'est en fait qu'une disposition commode des manipulations numériques que l'on exécute en utilisant la méthode chinoise. Notons à cet égard que *Les Neuf chapitres* proposent une certaine disposition sous forme de tableau des nombres intervenant dans un tel calcul — il est alors question de représentation de nombres à l'aide de « baguettes à calculer » (voir [3, p. 324] et [9, p. 207]). Mais l'assemblage de nombres qui en résulte diffère de ce qui suit.

Étape 0′ : Le nombre de chiffres de la racine carrée

On commence par diviser le nombre dont on extrait la racine carrée par tranches de deux chiffres en allant vers la gauche à partir de la virgule décimale. (S'il y a une partie décimale, on fait de même pour les décimales, en allant vers la droite à partir de la virgule.)

$$\begin{array}{r|l} 5\ \ 52\ \ 25 & \underline{} \\ & \\ & \end{array}$$

La racine carrée de 55 225 est donc composée de trois chiffres (dans sa partie entière.)

Étape I′ : Le chiffre des centaines

On cherche le chiffre a maximal tel que $a^2 \leq 5$. On a donc $a = 2$, et on élève au carré : $2 \times 2 = 4$, que l'on soustrait de 5, reste 1.

$$\begin{array}{l|l}
5\ \ 52\ \ 25 & \underline{2\qquad} \\
\underline{4} & 2 \times 2 \\
1 &
\end{array}$$

Étape II′ : Le chiffre des dizaines

On abaisse la tranche suivante, 52. Puis on biffe le produit 2×2 (qui ne servira plus), et on double le 2 pour obtenir 4.

$$\begin{array}{l|l}
5\ \ \cancel{52}\ \ 25 & \underline{2\qquad} \\
\underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\
1\ \ 52 & 4
\end{array}$$

On cherche alors le chiffre b maximal tel que le nombre qui s'écrit « $4b$ », lorsque multiplié par b, entre dans 152. Autrement dit, on veut que $(2 \cdot 20 + b) \cdot b \leq 152$. On trouve $b = 3$. Et on calcule : $43 \times 3 = 129$, que l'on soustrait de 152, reste 23.

$$\begin{array}{l|l}
5\ \ \cancel{52}\ \ 25 & \underline{23\qquad} \\
\underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\
1\ \ 52 & 43 \times 3 \\
\underline{1\ \ 29} & \\
\ \ \ 23 &
\end{array}$$

Étape III′ : Le chiffre des unités

On abaisse la tranche suivante, 25. Puis on biffe le produit 43×3, et on double 23, obtenant 46.

$$\begin{array}{l|l}
5\ \ \cancel{52}\ \ \cancel{25} & \underline{23\qquad} \\
\underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\
1\ \ 52 & \cancel{43 \times 3} \\
\underline{1\ \ 29} & 46 \\
\ \ \ 23\ \ 25 &
\end{array}$$

On cherche alors le chiffre c maximal tel que le nombre qui s'écrit « $46c$ », lorsque multiplié par c, entre dans 2 325. Autrement dit, on veut que $(2 \cdot 230 + c) \cdot c \leq 2\,325$. On trouve $c = 5$. Et on calcule : $465 \times 5 = 2\,325$, de sorte qu'il y a un reste de 0 et que la racine carrée est maintenant sous nos yeux, au haut et à la droite de la grille de calcul : $\sqrt{55\,225} = 235$.

$$\begin{array}{l|l}
5\ \cancel{52}\ \cancel{25} & \underline{235\qquad} \\
\underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\
1\ 52 & \cancel{43 \times 3} \\
\underline{1\ 29} & 465 \times 5 \\
23\ 25 & \\
\underline{23\ 25} & \\
0 &
\end{array}$$

Le « mystère » entourant les étapes du type « *on double le nombre apparaissant à la ligne du haut, dans la partie droite du tableau de calcul* » s'évanouit complètement lorsqu'on songe au lien avec la décomposition géométrique du carré initial en rectangles et carrés de différentes tailles, telle que proposée par Liu Hui. Les diverses manipulations effectuées lors de l'application de l'algorithme « chiffre à chiffre » deviennent d'ailleurs plus limpides si on prend la peine d'inscrire les zéros requis pour combler toutes les positions décimales au cours du calcul. (On peut aussi en profiter pour aligner les calculs intermédiaires correspondant aux inégalités (10), (11) et (12) avec les produits qui en résultent.)

$$\begin{array}{r|l}
5\ \cancel{52}\ \cancel{25} & \underline{235\qquad} \\
\underline{4\ 00\ 00} & \cancel{200 \times 200} \\
1\ 52\ 25 & \\
\underline{1\ 29\ 00} & \cancel{430 \times 30} \\
23\ 25 & \\
\underline{23\ 25} & 465 \times 5 \\
0 &
\end{array}$$

6.3 Une vision algébrique de l'algorithme usuel

Algébriquement parlant, l'algorithme usuel dont il a été question à la section précédente peut se voir comme l'utilisation à répétition de l'identité fondamentale

$$(u+v)^2 = u^2 + (2uv + v^2) \tag{13}$$

(le même lien peut bien sûr être fait avec la procédure géométrique de Liu Hui). Nous indiquons sommairement ici comment cette identité intervient dans les calculs en cause.

Étape I″ : Le chiffre des centaines

Pour trouver le chiffres des centaines a, on utilise l'inégalité (10), $(a \cdot 10^2)^2 \leq 55\,225$, dont l'interprétation est la même dans un contexte algébrique.

Étape II$''$: Le chiffre des dizaines

Soit maintenant le chiffre des dizaines b. Dans ce cas, l'identité fondamentale (13) devient

$$(200 + b \cdot 10)^2 = 200^2 + (2 \cdot 200 \cdot b \cdot 10 + (b \cdot 10)^2).$$

Or, les deux derniers termes que l'on retrouve à la droite de cette égalité constituent le membre de gauche de l'inégalité (11) et ils peuvent se récrire comme $(2 \cdot 200 + b \cdot 10) \cdot b \cdot 10$. On cherche donc le b maximal tel que

$$(2 \cdot 200 + b \cdot 10) \cdot b \cdot 10 \leq 15\,225.$$

On obtient $b = 3$, de sorte que l'inégalité précédente devient $430 \times 30 = 12\,900 \leq 15\,225$, ce qui, à la section 6.2, correspond à la deuxième partie de l'étape II$'$.

Lorsqu'exprimée en termes généraux, conservant le symbole a pour le chiffre des centaines, cette étape concerne donc l'expression $(2 \cdot a \cdot 10^2 + b \cdot 10) \cdot b \cdot 10$, qui se repère facilement dans les manipulations de la section 6.2.

Étape III$''$: Le chiffre des unités

Dans le cas du chiffre des unités c, l'identité fondamentale (13) devient maintenant

$$(230 + c)^2 = 230^2 + (2 \cdot 230 \cdot c + c^2).$$

Encore une fois, les deux derniers termes à la droite de l'égalité renvoient à une inégalité de la section 6.1, à savoir l'inégalité (12). En récrivant ces termes sous la forme $(2 \cdot 230 + c) \cdot c$, on retrouve ainsi le calcul de la dernière partie de l'étape III$'$, à la section 6.2.

Dans le cas général, l'interprétation algébrique de cette étape porte sur l'expression

$$2 \cdot (a \cdot 10^2 + b \cdot 10) \cdot c + c^2 = (2 \cdot (a \cdot 10^2 + b \cdot 10) + c) \cdot c,$$

qui intervient dans les calculs de la section 6.2.

Le lecteur intéressé trouvera dans [17] une autre analyse algébrique de l'algorithme usuel.

7 Quelques autres avenues

Le présent texte ne vise aucunement à l'exhaustivité en ce qui concerne le développement, au fil des âges, de techniques d'extraction de racine carrée. D'autres contributions auraient mérité d'être présentées, et nous nous bornons à en souligner trois au passage.

1. Vers l'an 370 de notre ère, Théon d'Alexandrie utilise comme support géométrique à ses calculs la dissection canonique du carré de côté $a+b$ en deux carrés et deux rectangles — décomposition pour laquelle il renvoie à la proposition II.4 des *Éléments* d'Euclide. Théon est alors en train de commenter l'*Almageste* de Ptolémée et il veut expliquer comment calculer $\sqrt{4500}$, dont ce dernier a donné la valeur sans explication. La figure qui accompagne le raisonnement de Théon (voir [14, p. 471]) est en tous points identique à celle de Liu Hui (figure 8), et l'algorithme qui en résulte est très près de l'algorithme « chiffre à chiffre » dont il a été question plus haut. La traduction du texte de Théon se trouve dans [2, pp. 233–234].
2. Cet algorithme « chiffre à chiffre » est présent dans de nombreux ouvrages de calcul au Moyen Âge. Un exemple en est donné par le mathématicien marocain Ibn al-Banna (XIIIe siècle) qui, en s'appuyant sur la numération positionnelle, a fourni une description de la procédure à suivre dans l'extraction d'une racine carrée (voir [2, pp. 235–237]).
3. On retrouve dans l'Antiquité grecque une méthode tout autre de calcul de $\sqrt{2}$. Elle repose sur le constat, connu des Pythagoriciens, que le carré construit sur la diagonale d'un carré donné a une aire double de celle du carré de départ. Cependant l'irrationalité du rapport entre la diagonale et le côté du carré aurait amené les Pythagoriciens à introduire la procédure dite des *nombres latéraux et diagonaux* afin d'obtenir des valeurs approximatives de ce rapport (c'est-à-dire, en langage moderne, du nombre $\sqrt{2}$). La procédure en cause peut être vue comme consistant à travailler avec des rapports rationnels successifs, mais tels que le carré de l'un des membres d'un rapport donné ne diffère que d'une unité du double du carré de l'autre membre.

   Dans un ouvrage intitulé *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* ([15]), le philosophe Théon de Smyrne (IIe siècle de notre ère) introduit deux suites de nombres entiers satisfaisant justement une relation de ce type. Plus précisément, posant $c_1 = d_1 = 1$, il définit deux suites $\{c_n\}$ et $\{d_n\}$ par les égalités

   $$c_{n+1} = c_n + d_n \qquad \text{et} \qquad d_{n+1} = 2c_n + d_n.$$

   On obtient ainsi $c_2 = 2, d_2 = 3, c_3 = 5, d_3 = 7, c_4 = 12, d_4 = 17,$ etc. Théon mentionne que le carré de chaque nombre « diagonal » d_n diffère d'une unité du double du carré du nombre « latéral » correspondant c_n, ces différences prenant alternativement les valeurs -1 et $+1$. On a en effet la relation

   $$d_n^2 = 2c_n^2 + (-1)^n, \tag{14}$$

qui se vérifie aisément en notations modernes : puisque

$$\begin{aligned} d_n^2 - 2c_n^2 &= (2c_{n-1} + d_{n-1})^2 - 2(c_{n-1} + d_{n-1})^2 \\ &= 2c_{n-1}^2 - d_{n-1}^2 \\ &= -(d_{n-1}^2 - 2c_{n-1}^2), \end{aligned}$$

chaque passage d'une étape à l'autre ne fait donc qu'introduire un changement de signe, ce qui donne le résultat désiré lorsqu'on observe que $d_1^2 - 2c_1^2 = -1$.

D'un point de vue géométrique, les nombres latéraux et diagonaux peuvent s'interpréter comme suit. Partant d'un losange de côtés 1 et dont l'une des diagonales est elle aussi de longueur 1 — on a en effet $c_1 = d_1 = 1$ —, c'est-à-dire un losange dont les angles valent 60° et 120°, chaque étape d'itération consiste alors à remplacer ce losange par un autre plus grand et dont la forme se rapproche de plus en plus de celle d'un carré. Les rapports $\frac{d_n}{c_n}$, qui prennent comme valeurs successives $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, etc., tendent donc vers $\sqrt{2}$, alternativement par défaut et par excès, comme le montre d'ailleurs l'égalité (14) lorsque récrite sous la forme

$$\frac{d_n^2}{c_n^2} = 2 + \frac{(-1)^n}{c_n^2}. \tag{15}$$

En d'autres termes, si c_n est vu comme le côté d'un carré, alors d_n donne une approximation de sa diagonale. Notons que plus les d_n et c_n sont grands, meilleure est l'approximation — cette observation résulte immédiatement de l'égalité (15), ou encore peut être vue comme liée au fait que la différence entre d_n^2 et $2c_n^2$ n'est toujours que de 1.

Le commentateur Proclus (V$^{\text{e}}$ siècle) indique que la procédure des nombres latéraux et diagonaux, qu'il associe explicitement aux Pythagoriciens, peut se voir géométriquement comme résultant de la proposition II.10 des *Éléments* d'Euclide (proposition de ce fait connue bien avant l'époque d'Euclide lui-même), dont une interprétation algébrique réside dans l'identité

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2$$

(voir [16, pp. 138–139]).

L'égalité (14) — avec n pair — est un cas particulier de l'*équation de Pell-Fermat*. Plus généralement, soit l'équation $x^2 - my^2 = 1$, où m un entier positif non carré. Cette expression peut se récrire sous la forme

$$\frac{x^2}{y^2} = m + \frac{1}{y^2}\,,$$

de sorte que lorsque y est « grand », la fraction $\frac{x}{y}$ donne une bonne approximation rationnelle de $\sqrt{m}$.

8 Conclusion

Lorsqu'il est question d'une racine carrée, c'est bien sûr d'abord et avant tout la relation

$$p = \sqrt{q} \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 = q$$

qui est en cause. Davantage qu'une technique de calcul, c'est elle qui fait vraiment foi de l'essence même d'une racine carrée. De là, des techniques d'approximation numérique peuvent être mises en place. Si on dispose par exemple d'une calculatrice ayant une touche $\times$ (mais pas de touche $\sqrt{\cdot}$), la suite de calculs suivants permet d'aller chercher les trois premières décimales de $\sqrt{2}$. L'idée est alors de prendre 2 « en sandwich » entre deux carrés de manière de plus en plus fine, en augmentant d'une décimale la précision à chaque étape du calcul.

$$\begin{array}{rcccl} 1^2 & < & 2 & < & 2^2\,, \\ 1{,}4^2 & < & 2 & < & 1{,}5^2\,, \\ 1{,}41^2 & < & 2 & < & 1{,}42^2\,, \\ 1{,}414^2 & < & 2 & < & 1{,}415^2\,. \end{array}$$

Si élémentaire soit-il, cet algorithme « chiffre à chiffre » n'en demeure pas moins fondamental.

Les différentes méthodes présentées dans ce texte viennent apporter un éclairage différent sur l'extraction de racine carrée. Nous avons voulu de façon particulière mettre l'accent sur des méthodes reposant sur une interprétation géométrique, vision qui, nous semble-t-il, est trop souvent absente de l'enseignement usuel.

Plusieurs de ces méthodes sont d'une remarquable efficacité — pensons à la convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson, qui chapeaute plusieurs des algorithmes étudiés ici. Il pourrait être intéressant, lorsqu'on travaille avec des élèves de fin secondaire participant à des programmes où l'informatique a la part belle, de les amener à programmer Newton-Raphson et de leur permettre d'observer *de visu* la rapidité de convergence.

Cela pourrait même être l'occasion de réfléchir à ce qui se passe « dans le ventre » de la calculatrice, lorsqu'on appuie sur la touche $\sqrt{\cdot}$. Il y a peut-être du Newton-Raphson là-dessous... ou quelque chose du genre !

Appendice 1 : L'inégalité MG–MA

Nous voulons établir l'*inégalité moyenne géométrique – moyenne arithmétique* :

$$\sqrt{u \cdot v} \leq \frac{1}{2}(u + v),$$

où u et v sont deux réels positifs (ou nuls), avec égalité lorsque $u = v$. Le résultat est clair si l'un de ces nombres est nul.

Preuve géométrique

Soit un demi-cercle de diamètre $u + v$; la perpendiculaire élevée au point de rencontre des deux segments (de longueur respective u et v) est de longueur $\sqrt{u \cdot v}$. Et celle-ci est clairement bornée par le rayon du demi-cercle, qui est de longueur $\frac{1}{2}(u+v)$. Le cas limite $u = v$ correspond au fait que la perpendiculaire et le rayon coïncident.

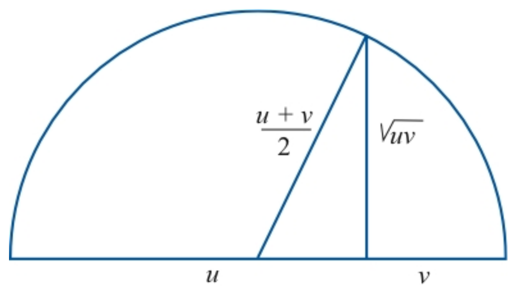

Figure 12

Preuve algébrique

L'idée est de faire appel à une équation algébrique bien choisie d'où découlera l'inégalité MG–MA. Voici deux exemples de telles équations — qui ne sont de fait qu'une variante l'une de l'autre.

- Observons que
$$(u+v)^2 = 4uv + (u-v)^2. \tag{16}$$
Il suit alors que
$$(u+v)^2 \geq 4uv,$$
d'où, en prenant la racine carrée,
$$u + v \geq 2\sqrt{uv},$$
avec égalité lorsque $u = v$ (puisqu'on a alors $(u-v)^2 = 0$).
- Puisque $(x-y)^2 \geq 0$, on a
$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \tag{17}$$
avec égalité lorsque $x = y$. Le résultat suit en posant $x^2 = u$ et $y^2 = v$.

Remarque

Autant que je sache, l'inégalité MG–MA n'a pas été formulée de manière explicite dans la littérature de l'Antiquité — ce n'était vraisemblablement pas dans l'« esprit » de l'époque, pourrait-on dire. Néanmoins elle se retrouve en filigrane de divers textes. Ainsi, Heath ([5, II, pp. 185–186]) fait observer que la proposition V.25 des *Éléments* d'Euclide mène comme cas particulier à l'inégalité MG–MA. Cette proposition s'interprète en effet comme suit, algébriquement parlant : si les quantités a, b, c et d satisfont les proportions

$$a : b = c : d$$

(avec a la plus grande quantité et d la plus petite), alors

$$a + d > b + c.$$

Dans le cas où $b = c$, alors b est la moyenne géométrique de a et d, et la proposition V.25 affirme que celle-ci est bornée par la moyenne arithmétique de ces deux mêmes nombres.

De plus, la figure 12 qui accompagne la preuve géométrique précédente se retrouve telle quelle à la section 11 du Livre III de la *Collection mathématique* ([13, pp. 50–51]) de Pappus d'Alexandrie (IV$^{\text{e}}$ siècle). Pappus s'intéresse alors au problème de la représentation dans un demi-cercle des moyennes arithmétique et géométrique (de même que de la moyenne harmonique).

Notons enfin que l'identité (16) est connue depuis fort longtemps et correspond à la proposition II.5 des *Éléments* d'Euclide qui, vue en tant que résultat d'« algèbre géométrique », peut s'interpréter directement comme

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = uv + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2.$$

L'identité (16) est susceptible d'une preuve visuelle, tout comme l'inégalité (17) — voir figure 13.

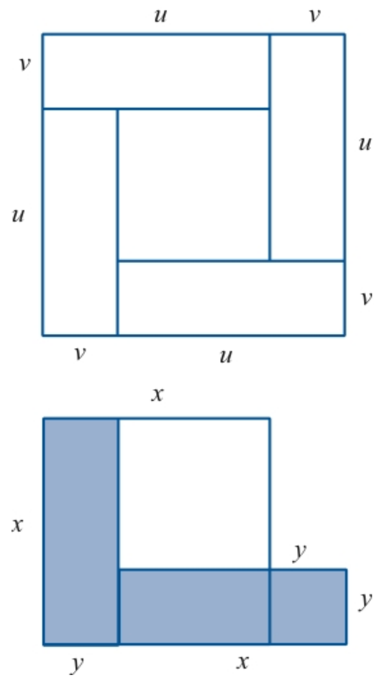

Figure 13

Appendice 2 : La convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson

Rappel : Les développements de Taylor

Étant donné une fonction f — pour les fins de la discussion, nous considérons une fonction d'une variable —, une idée de base en analyse est d'utiliser des fonctions simples, habituellement des polynômes, afin d'approximer f. Par exemple, on pourra chercher un polynôme P coïncidant avec f et certaines de ses dérivées en un point donné — il ne s'agit évidemment pas là de la seule manière de déterminer un polynôme d'approximation, mais cela en est une de grande importance, tant sur les plans théorique et historique que pratique.

On vérifie sans trop de peine (voir votre cours de calcul différentiel préféré) que si f est une fonction possédant une dérivée d'ordre n en un point a, il existe un et un seul polynôme P de degré $\leq n$ satisfaisant les $n+1$ conditions

$$P(a) = f(a), \qquad P'(a) = f'(a), \qquad P''(a) = f''(a), \qquad \ldots, \qquad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),$$

où $P^{(j)}$ et $f^{(j)}$ désignent la j^{e} dérivée de P et de f, respectivement. Si on écrit ce polynôme sous la forme générale

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

alors chaque coefficient a_j satisfait l'égalité

$$a_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}.$$

On obtient ainsi le *polynôme de Taylor de degré n au point a* pour la fonction f :

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

La fonction f peut en conséquence être représentée sous la forme d'un *développement de Taylor*,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_{n,a}(x),$$

le dernier terme donnant l'erreur introduite dans l'approximation de f par le polynôme $P_{n,a}$.[5]

Application à la méthode de Newton-Raphson[6]

Nous utilisons maintenant la notion de développement de Taylor afin de jauger l'efficacité de la méthode de Newton-Raphson dans la recherche des zéros d'une fonction.

Soit donc une fonction f possédant dans un certain intervalle un zéro $\bar{x}$ (on a donc par hypothèse $f(\bar{x}) = 0$), et introduisons la fonction auxiliaire

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

témoignant du processus itératif de calcul des racines de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton-Raphson. Effectuant le développement de Taylor de degré 2 de g autour du point $\bar{x}$, on obtient[7]

$$g(x) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x-\bar{x})^2 + E_{2,\bar{x}}(x).$$

[5] Par exemple, si on suppose de plus que la dérivée $f^{(n+1)}$ existe, la version dite *de Lagrange* de l'erreur d'approximation est de la forme $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, avec c entre a et x.

[6] Je remercie mon collègue Jean-Jacques Gervais d'avoir porté à mon attention cette preuve de la convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson.

[7] Nous avons besoin à cette fin que la fonction g soit deux fois dérivable sur l'intervalle en cause, ce qui entraîne des conditions analogues pour f. Dans le cas qui nous intéresse pour le calcul de la racine carrée $\sqrt{k}$, à savoir la fonction f de la forme $f(x) = x^2 - k$, ces conditions ne posent évidemment aucun problème.

Puisque par hypothèse $f(\bar{x}) = 0$, on a donc $g(\bar{x}) = \bar{x}$ (on suppose ici que $f'(\bar{x}) \neq 0$, ce qui revient à éliminer les racines doubles de l'équation $f(x) = 0$). De plus, on vérifie sans trop de peine que $g'(\bar{x}) = 0$. En effet, un simple exercice de dérivation donne

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

de sorte que

$$g'(\bar{x}) = 1 - \frac{[f'(\bar{x})]^2 - 0}{[f'(\bar{x})]^2} = 0.$$

Il s'ensuit donc que

$$g(x) = \bar{x} + \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 + E_{2,\bar{x}}(x),$$

c'est-à-dire

$$g(x) - \bar{x} \approx \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2. \qquad (*)$$

Posant maintenant $x = x_i$, le i^{e} itéré dans l'application de la méthode de Newton-Raphson, on a donc $g(x_i) = x_{i+1}$, de sorte que la ligne $(*)$ devient

$$x_{i+1} - \bar{x} \approx \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x_i - \bar{x})^2. \qquad (**)$$

Or les expressions $x_{i+1} - \bar{x}$ et $x_i - \bar{x}$ (notons-les respectivement e_{i+1} et e_i) représentent les erreurs d'approximation à la $(i+1)^{\text{e}}$ et à la i^{e} étape. De plus le facteur $\frac{g''(\bar{x})}{2!}$ est une constante. La ligne $(**)$ est donc de la forme

$$e_{i+1} \approx cte \cdot e_i^2,$$

ce qui exprime le fait qu'à chaque itération, l'erreur d'approximation change selon une puissance 2. On dit alors que le processus de Newton-Raphson est de *convergence quadratique*, ou de *convergence d'ordre 2*. Cela signifie *grosso modo* que le nombre de décimales de précision double à chaque étape d'itération. Ainsi, si l'erreur e_i est de l'ordre de 10^{-4}, e_{i+1} sera d'ordre 10^{-8}. Newton-Raphson est donc une méthode puissamment efficace !

Références

[1] Marco Bélanger, Margot de Serres, François Laviolette, Anne-Marie Lorrain et Vincent Papillon, *Analyse et calcul.* (3e édition) Modulo Éditeur, 1994.

[2] Jean-Luc Chabert *et al.*, *Histoire d'algorithmes : Du caillou à la puce.* Belin, 1994.

[3] Karine Chemla et Guo Shuchun, *Les Neuf chapitres : Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires.* Dunod, 2004.

[4] René Descartes, *La Géométrie.* (1637) Version en français moderne parue dans : Auguste Comte, *La géométrie analytique.* Paris, Louis Bahl, 1894.

[5] Euclide, *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* (Traduction et commentaires de Thomas Heath.) (2^{e} édition) Tomes I, II et III. Dover, 1956. (Réimpression de la version de 1926)

[6] Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics.* Volume I : *From Thales to Euclid.* Volume II : *From Aristarchus to Diophantus.* Dover, 1981. (Réimpression de la version de 1921)

[7] Héron d'Alexandrie, *Les Métriques.* In : *Heronis Alexandrini Opera quæ sunt omnia*, vol. III (texte grec et traduction allemande par Hermann Schöne). B.G. Teubner, 1903. (Réimpression 1976)

[8] George Gheverghese Joseph, *The Crest of the Peacock : Non-European Roots of Mathematics.* Penguin Books, 1992.

[9] Shen Kangshen, John N. Crossley et Anthony W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art : Companion and Commentary.* Oxford University Press, 1999.

[10] Victor J. Katz, *A History of Mathematics : An Introduction.* (2^{e} édition) Addison-Wesley, 1998.

[11] Richard Mankiewicz, *L'histoire des mathématiques.* Seuil, 2001.

[12] Otto Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity.* (2^{e} édition) Dover, 1969. (Réimpression de la version de 1957)

[13] Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique.* Tome premier. (Traduction et commentaires par Paul Ver Eecke.) Desclée De Brouwer, 1933.

[14] Théon d'Alexandrie, *Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste.* In : A. Rome, dir., *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste.* Tome II. Biblioteca Apostolica Vaticana, 1936.

[15] Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon.* (Traduction et commentaires par J. Dupuis.) Hachette, 1892.

[16] Ivor Thomas, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics.* Volume I : *From Thales to Euclid*. Harvard University Press, 2002. (Révision de la version de 1939)

[17] Jean M. Turgeon, « Racines carrées, racines cubiques. » Bulletin AMQ, vol. 46, no 1, mars 2006, pp. 27–40.